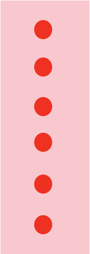
अध्याय: 3

सङ्ख्याभिः सह क्रीडा

3.1 भूमिका

रमेशस्य समीपे 6 काचगुलिकाः सन्ति। सः ताः गुलिकाः प्रत्येकं पङ्क्तिषु समानरीत्या स्थापयितुम् इच्छति। सः तान् अधोलिखितरीत्या स्थापयति अपि च काचगुलिकानां सङ्ख्यां गणयति।

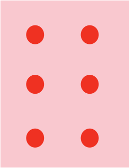
(i) प्रत्येकं पङ्क्तौ 1 मणिः



पङ्क्तीनां सङ्ख्या = 6

काचगुलिकानाम् आहत्य सङ्ख्या = 1 x 6 = 6

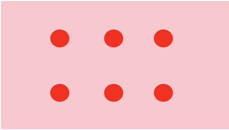
(ii) प्रत्येकं पङ्क्तौ 2 मणिः



पङ्क्तीनां सङ्ख्या = 3

काचगुलिकानाम् आहत्य सङ्ख्या = 2 x 3 = 6

(iii) प्रत्येकं पङ्क्तौ 3 मणिः

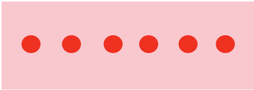


पङ्क्तीनां सङ्ख्या = 2

काचगुलिकानाम् आहत्य सङ्ख्या = 3 x 2 = 6

(iv) सः कामपि एतादृशीं व्यवस्थां चिन्तयितुं नाशक्नोत् यत्र प्रत्येकं पङ्क्तौ 4 अथवा 5 मणयः स्युः। अतः अधुना केवलम् एका एव व्यवस्था अस्ति यत्र एकस्यां पङ्क्तौ 6 काचगुलिकानाम् अपि स्थापनं कर्तुं शक्यते।

पङ्क्तीनां सङ्ख्या = 1



काचगुलिकानाम् आहत्य सङ्ख्या = 6 x 1 = 6

एतेषु परिकलनेषु रमेशः पश्यति यत् 6 सङ्ख्या विभिन्नप्रकारकेषु द्वयोः संख्ययोः गुणनफलरूपेण लेखितुं शक्यते इति।

6 = 1 x 6;   6 = 2 x 3;   6 = 3 x 2;   6 = 6 x 1;

6 = 2 x 3 इत्यनेन इदं वक्तुं शक्यते यत् 2,3 इति सङ्ख्याद्वयं 6 सङ्ख्यां सम्पूर्णम् विभजति इति। गुणनफलेन 6 = 1 x 6 अनेन 6 सङ्ख्यायाः अन्यौ विभाजकौ 1, 6 इति प्राप्येते।

अनेन प्रकारेण 1,2,3,6 इत्येताः सङ्ख्याः 6 सङ्ख्यायाः विभाजकाः सन्ति। एते 6 सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः इत्युच्यन्ते।

18 काचगुलिकाः पङ्क्तिषु व्यवस्थिताः कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु अपि च 18 सङ्ख्यायाः गुणनखण्डान् अभिजानन्तु।

3. 2 गुणनखण्डः अपि च गुणजः

मेरीमहोदया ताः सङ्ख्याः ज्ञातुम् इच्छति याः 4 सङ्ख्यां सम्पूर्णतया विभाजयन्ति। सा 4 सङ्ख्यां 4 सङ्ख्यायाः लघुतरया अथवा समानया सङ्ख्यायाभिः चापि विभाजयति।

1) 4 (4
  − 4
  0

भागफलम् = 4
शेषफलम् = 0
4 = 1 x 4;

2) 4 (2
  − 4
  0

भागफलम् = 2
शेषः = 0
4 = 2 x 2

3) 4 (1
  − 3
  1

भागफलम् = 1
शेषः = 1

4) 4 (1
  − 4
  0

भागफलम् = 1
शेषः = 0

सा 4 सङ्ख्या अधोलिखितरूपेण लेखितुं शक्यते इति जानाति।

4 = 1 x 4; 4 = 2 x 2; 4 = 4 x 1

सा अभिजानाति यत् 1, 2, 4 इति सङ्ख्याः 4 इति सङ्ख्यायाः सम्पूर्ण-विभाजकाः सन्ति।

एताः सङ्ख्याः 4 सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः इत्युच्यन्ते।

कस्याः अपि सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः तस्याः सम्पूर्ण-विभाजकाः अपि भवन्ति।

अवधानं ददतु यत् 4 सङ्ख्यायाः प्रत्येकम् अपि गुणनखण्डाः, 4 सङ्ख्यायाः अपेक्षया लघुतराः अथवा समानाः सन्ति।

क्रीडा 1 : इमां क्रीडां क्रीडितुं द्वयोः अपेक्षा अस्ति यथा A, B इति स्वीकुर्मः। इयं क्रीडा गुणनखण्डस्य विषये अस्ति।

एतदर्थं 50 स्फोरकपत्राणां आवश्यकता अस्ति येषाम् उपरि 1 तः 50 पर्यन्तं सङ्ख्याः लिखिताः स्युः। एकस्याः उत्पीठिकायाः उपरि अधोदर्शितक्रमेण एतानि व्यवस्थितानि कुर्वन्तु।

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	50

सोपानानि –

(a) निर्णयं कुर्वन्तु यत् आदौ कः क्रीडिष्यति; A अथवा B इति।

(b) चिन्तयन्तु यत् A प्रथमं क्रीडति। सः उत्पीठिकातः एकं पत्रं स्वीकरोति अपि च स्वस्य समीपे स्थापयति। पत्रे 28 इति लिखितम् अस्ति इति चिन्तयन्तु।

(c) द्वितीयः B अधुना यत्र 28 सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः लिखिताः सन्ति तानि सर्वाणि पत्राणि स्वीकृत्य स्वसमीपे स्थापयति।

(d) पुनः B इति क्रीडकः उत्पीठिकातः एकं पत्रं स्वीकरोति। अधुना A तानि सर्वाणि पत्राणि स्वीकरोति यत्र B इत्यनेन स्वीकृते पत्रे लिखित-सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः लिखिताः सन्ति।

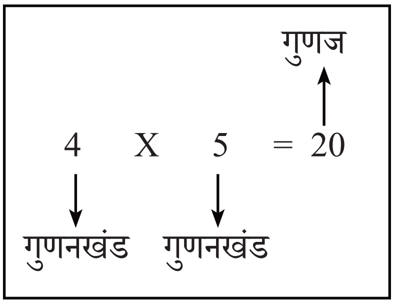
(e) सर्वेषां पत्राणां समाप्तिपर्यन्तं क्रीडा प्रचलति।

(f) A अपि च B स्वसमीपे विद्यमानेषु पत्रेषु याः सङ्ख्याः लिखिताः सन्ति तासां योगं कुरुतः। यस्य योगः अधिकः अस्ति सः विजयी भविष्यति।

पत्राणां सङ्ख्यां वर्धयित्वा क्रीडा इतोऽपि रुचिकरा कर्तुं शक्यते।

इमां क्रीडां मित्रेण सह क्रीडन्तु। किं भवन्तः अस्यां क्रीडायां विजयं प्राप्तुं कमपि विधिम् अन्वेषयितुं शक्नुवन्ति ?

यदि वयं 20 = 4 x 5 इति लिखामः तर्हि 4 अपि च 5, 20 इति सङ्ख्यायाः गुणनखण्डत्वेन अस्ति इति कथयामः। एवमपि वदामः यत् 20 सङ्ख्या 4 अपि च 5 इति अनयोः गुणजरूपा अस्ति इति।



24 = 2 x 12 इति एषा सङ्क्रिया दर्शयति यत् 2 अपि च 12 सङ्ख्या 24 इत्यस्याः गुणनखण्डः अपि च 24 सङ्ख्या 2,12

इति अनयोः गुणजरूपा अस्ति।

वयं कथयामः यत् **एका सङ्ख्या स्वस्याः प्रत्येकं गुणनखण्डस्य एका गुणजरूपा अपि भवति।**

प्रयत्नं कुर्वन्तु

45, 30 अपि च 36 एतासां सङ्ख्यानां गुणनखण्डान् अवजानन्तु।

आयान्तु , अधुना गुणनखण्डानां गुणजानां च विषये कानिचन रुचिपूर्ण-तथ्यानि पश्यामः।

(a) काष्ठस्य अथवा कागदस्य काश्चन 3 मात्रकाः पट्टिकाः एकत्रीकुर्वन्तु।

(b) अधोलिखितरीत्या प्रदत्ताकृतेः अनुसारं योजयन्तु।

उपरि विद्यमानायाः पट्टिकायाः दीर्घता 3 = 1 x 3 मात्रकः अस्ति।

तदधः विद्यमानायाः पट्टिकायाः दीर्घता 3 + 3 = 6 मात्रकः अस्ति। अपि च 6 = 2 x 3 अस्ति।

3	3				
3	3	6			
3	3	3	9		
3	3	3	3	12	
3	3	3	3	3	15

अग्रिम-पट्टिकायाः दीर्घता 3 + 3 +3 = 9 मात्रकः अस्ति। अपि च 9 = 3 x 3 अस्ति। एवमेव अन्यलम्बान् अधोलिखितक्रमेण व्यक्तीकुर्तुं शक्नुमः।

12 = 4 x 3 ; 15 = 5 x 3

वयं वदामः यत् सङ्ख्याः 3, 6, 9, 15 इत्येताः 3 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणजाः सन्ति।

3 इत्यस्याः गुणजरूपाणां सूची 18, 21, 24, ... अनेन रूपेण वर्धयितुं शक्यते। एतासु सङ्ख्यासु प्रत्येकं गुणजः 3 सङ्ख्यायाः बृहत्तरः अथवा समानः अस्ति।

सङ्ख्या 4 इत्यस्याः गुणजाः 4, 8, 12, 16, 20, 24 इत्येताः सन्ति। एषा सूची समाप्ता न भवति। एतासु सङ्ख्यासु प्रत्येकं गुणजः 4 सङ्ख्यायाः बृहत्तरः अथवा समानः अस्ति।

आयान्तु पश्यामः यत् गुणनखण्डानाम् अपि च गुणजानां विषये वयं किं निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः इति।

1. किं कापि एतादृशी सङ्ख्या अस्ति, या प्रत्येकं गुणनखण्डस्य रूपेण भवति ? आम् , एषा सङ्ख्या 1 अस्ति। उदाहरणार्थम्, 6 = 1 x 6, 18 = 1 x 18 इत्यादि। इतोऽपि सङ्ख्याः स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

   अइत्यनेन वयं वदामः यत् **सङ्ख्या 1 प्रत्येकं सङ्ख्यायाः एकः गुणनखण्डः भवति।**

2. किं 7 इति सङ्ख्या स्वयं गुणनखण्डरूपेण भवितुं शक्नोति ? भवन्तः 7 इति सङ्ख्यां 7 x 1 इति रूपेण लेखितुं शक्नुवन्ति। सङ्ख्या 10 इत्यस्याः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ? सङ्ख्या 15 इत्यस्याः विषये भवन्तः किं चिन्तयन्ति ? भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् प्रत्येकं सङ्ख्याम् अपि भवन्तः लेखितुं शक्नुवन्ति। वयं वदामः यत् **प्रत्येकं सङ्ख्या स्वयं स्वस्याः एकः गुणनखण्डः भवति।**

3. 16 इत्यस्याः गुणनखण्डाः के भवन्ति ? ते 1, 2, 4, अपि च 16 इत्येताः सङ्ख्याः भवन्ति। किं भवन्तः एतेषु गुणनखण्डेषु तादृशं गुणनखण्डं प्राप्तवन्तः यत् यः 16 सङ्ख्यां न विभाजयति ? 20 अपि च 36 संख्ययोः कृते अपि उपरि उक्त-कथनस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

   भवन्तः इदं प्राप्नुवन्ति यत् **एकस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः तस्याः सङ्ख्यायाः एकः विभाजकः भवति एव।**

4. 34 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः के भवन्ति ? ते 1, 2, 17 अपि च स्वयं 34 इति अस्ति। बृहत्तमः गुणनखण्डः 34 अस्ति। अन्ये तु 1, 2, 17 एताः सङ्ख्याः 34 सङ्ख्यापेक्षया न्यूनतराः सन्ति। 81 अपि च 56 इत्यनयोः कृते अपि अस्य अंशस्य परीक्षणं कुर्वन्तु। वयं वदामः यत् **एकस्याः दत्तसङ्ख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डः तस्याः सङ्ख्यायाः अपेक्षया लघुतरः अथवा समानः भवति।**

5. 76 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डानां सङ्ख्या 5 अस्ति। 136 इत्यस्याः कति गुणनखण्डाः भविष्यन्ति ? 96 इत्यस्याः कति गुणनखण्डाः भविष्यन्ति ? भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एतासु सर्वासां सङ्ख्यानां गुणनखण्डनां गणना कर्तुं शक्यते। भवन्तः 10576, 25642 इत्यादि-बृहत्-सङ्ख्यानामपि गुणनखण्डस्य गणनं कर्तुं शक्नुवन्ति किन्तु एतादृश-सङ्ख्यानां गुणनखण्डं कर्तुं कठिनता भवति एव।

   वयं वदामः यत् **एकस्याः दत्तसङ्ख्यायाः गुणनखण्डानां सङ्ख्या परिमिता भवति।**

6. 7 सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः के सन्ति ? स्पष्टतया 7, 14, 21, 28,… एताः सङ्ख्याः भवन्ति। भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एतासु प्रत्येकं सङ्ख्या 7 सङ्ख्या इत्यस्मात् बृहत्तरा अथवा समाना अस्ति। किम् इदं सर्वासां सङ्ख्यानां कृते सत्यं भवति ? अमुम् अंशं 6, 9, अपि च 10 इत्येताः सङ्ख्याः स्वीकृत्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

   अनेन वयं प्राप्नुमः **यत् एकस्याः सङ्ख्यायाः प्रत्येकं गुणजः तस्याः सङ्ख्यायाः अपेक्षया बृहत्तरः अथवा समानः भवति।**

7. 5 सङ्ख्यायाः गुणजान् लिखन्तु। ते 5, 10, 15, 20,… सन्ति। किं भवन्तः चिन्तयितुं शक्नुवन्ति यत् किम् एषा सूची समाप्यते ? नास्ति, एषा सूची कदापि न समाप्यते। 6, 7 इत्यादि-सङ्ख्यानां गुणजान् स्वीकृत्य अस्य अंशस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

   वयं वदामः यत् **एकस्याः दत्तसङ्ख्यायाः गुणज-रूपाणां सङ्ख्या अपरिमिता भवति।**

8. किं 7 स्वयं स्वस्य एकः गुणजः अस्ति ? आम्, किमर्थम् इति चेत् 7 = 7 x 1 अस्ति। किम् इदम् अन्यासां सङ्ख्यानां कृते अपि सत्यम् अस्ति ? 3, 12, 16 इत्येताः सङ्ख्याः स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु। भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् **प्रत्येकं सङ्ख्या स्वयं गुणजत्वेन अस्ति।**

6 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः सर्वे गुणनखण्डाः 1, 2, 3, 6 सन्ति। सह एव 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 x 6 अस्ति। वयं प्राप्नुमः यत् 6 इत्यस्याः सर्वेषां गुणनखण्डानां योगः 6 इत्यस्य द्विगुणितः अस्ति। 28 इत्यस्याः सर्वे गुणनखण्डाः 1, 2, 4, 7, 14, अपि च 28 सन्ति। एतेषां योगं कुर्मः चेत्

1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 x 28 अस्ति।

अर्थात् 28 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः सर्वेषां गुणनखण्डानां योगः 28 इत्यस्य द्विगुणितः अस्ति।

या सङ्ख्या तस्याः गुणनखण्डानां योगस्य द्विगुणिता भवति सा एका संपूर्णसङ्ख्या इत्युच्यते।

किं 10 एषा संपूर्णसङ्ख्या अस्ति ?

उदाहरणम् 1 : 68 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डान् लिखन्तु।

समाधानम् : वयं पश्यामः यत्

68 = 1 x 68   68 = 2 x 34   68 = 4 x 17

68 = 17 x 4

अत्रैव तिष्ठन्तु यतो हि 4 अपि च 17 सङ्ख्याद्वयं पूर्वमेव आगतम्।

अनेन प्रकारेण, 68 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः 1, 2, 4, 17, 34 अपि च 68 भवन्ति।

उदाहरणम् 2 : 36 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डान् लिखन्तु।

समाधानम् : 36 = 1 x 36   36 = 2 x 18

36 = 3 x 12   36 = 4 x 19

36 = 6 x 6

अत्रैव तिष्ठन्तु यतो हि गुणनखण्डद्वयं समानम् (6) अस्ति।

अपि च इष्ट-गुणनखण्डाः 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 अपि च 36 सन्ति।

उदाहरणम् 3 : 6 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः प्रथम-पञ्चगुणजान् लिखन्तु।

समाधानम् : गुणजाः

6 x 1 = 6,   6 x 2 = 12,   6 x 3 = 18,   6 x 4 = 24,   6 x 5 = 30

अर्थात् 6, 12,18, 24, 30 गुणजाः सन्ति।

अभ्यासः 3.1

1) अधोलिखित-सङ्ख्यानां कृते सर्वान् गुणनखण्डान् लिखन्तु।

(a) 24	(b) 15	(c) 21
(d) 27	(e) 12	(f) 20
(g) 18	(h) 23	(i) 36

2) अधोलिखित-सङ्ख्यानां कृते प्रथम-पञ्च-गुणजान् लिखन्तु।

(a) 5   (b) 8   (c) 9

3) संयोजयन्तु।

	अ	ब
(i)	35	(a) 8 अस्याः सङ्ख्यायाः गुणजः
(ii)	15	(b) 7 अस्याः सङ्ख्यायाः गुणजः
(iii)	16	(c) 70 अस्याः सङ्ख्यायाः गुणजः
(iv)	20	(d) 30 अस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः

(v) 25 (e) 50 अस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः

(f) 20 अस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः

4, 9 अनयोः सर्वान् गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ये 100 इत्यनेन न्यूनतराः सन्ति।

3. 3 अभाज्य-सङ्ख्याः भाज्य-सङ्ख्याः च

अधुना वयं यस्याः कस्याः अपि सङ्ख्यायाः गुणनखण्डकरणस्य विधीन् ज्ञातवन्तः। अधुना अधोलिखितानां कासाञ्चन सङ्ख्यानां गुणनखण्डानां सङ्ख्या-विषये अवधानं ददतु।

सङ्ख्या	गुणनखण्डाः	गुणनखण्डानां सङ्ख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

वयं पश्यामः यत् (a) सङ्ख्यायाः 1 इत्यस्याः एकः एव गुणनखण्डः अस्ति।

(b) काश्चन सङ्ख्याः यथा 2, 3, 5, 7, 11 इत्यादयः एतादृश्यः सन्ति, एतासां गुणनखण्डद्वयम् एव अस्ति। एताः सङ्ख्याः अभाज्य-सङ्ख्याः सन्ति। **यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः 1 अपि च स्वयं सा एव सङ्ख्या भवति सा सङ्ख्या अभाज्य-सङ्ख्या इत्युच्यते।**

इतोऽपि अन्याः अभाज्य-सङ्ख्याः ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

c) काश्चन सङ्ख्याः यथा 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादयः एतादृश्यः सन्ति एतासाम् अधिक-गुणनखण्डाः सन्ति एवमेव एताः सङ्ख्याः विभाज्यसङ्ख्याः सन्ति। **यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः द्वयोः अपि अधिकः भवति सा सङ्ख्या भाज्य-सङ्ख्या इत्युच्यते।**

किं 15 एका भाज्यसङ्ख्या अस्ति ? 18 अपि च 25 इति अनयोः विषये भवन्तः किं चिन्तयन्ति ?

वयं केनचित् सरलविधिना 1 इत्यनेन 100 पर्यन्तं गुणनखण्डकरणेन विना अभिज्ञातुं शक्नुमः। अमुं विधिं क्रिस्तोः पूर्वं कश्चन यवन-गणितज्ञः एरटोस्टनीस् (Eratosthenes) दत्तवान् आसीत्। आयान्तु अमुं विधिं पश्यन्तु। अधोलिखितं कोष्ठकम् अनुसरन्तु।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

सोपानम् 1 : 1 इति सङ्ख्यायाः उपरि X इति चिह्नं स्थापयन्तु यतः एषा एका अविभाज्यसङ्ख्या नास्ति।

सोपानम् 2 : 2 इति सङ्ख्यायाः उपरि वलयाकारं स्थापयन्तु। 2 इति सङ्ख्यायाः सर्वेषां गुणजरूपाणां यथा 4, 6, 8 इत्यादीनाम् उपरि X इति चिह्नं स्थापयन्तु।

सोपानम् 3 : भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् अग्रिमा रिक्तसङ्ख्या 3 इत्यस्ति। तां सङ्ख्यां वलयीकुर्वन्तु। अपि च 3 सङ्ख्यायाः सर्वेषां गुणजरूपाणाम् उपरि X चिह्नं स्थापयन्तु।

सोपानम् 4 : अग्रिमा रिक्तसङ्ख्या 5। तां सङ्ख्यां वलयीकुर्वन्तु। अपि च 5 सङ्ख्यायाः सर्वेषां गुणजरूपाणाम् उपरि X चिह्नं स्थापयन्तु।

> **अवधानं ददतु-**
> 1 इति सङ्ख्या न अभाज्यसङ्ख्या न भाज्यसङ्ख्या अस्ति।

सोपानम् 5 : इमां प्रक्रियां अग्रे अपि नयन्तु। यावत्पर्यन्तं सर्वासां सङ्ख्यानाम् उपरि वलयाकारः स्यात् अथवा X चिह्नं स्यात्। सर्वाः वलयीकृताः सङ्ख्याः अविभाज्य-सङ्ख्याः। 1 सङ्ख्यां परित्यज्य सर्वाः X इति चिह्नाङ्किताः सङ्ख्याः विभाज्यसङ्ख्याः। अमुं विधिं एरटोस्टनीस्-महोदयस्य छलनी-विधिः (Sieve of Eratosthenes) इति वदामः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अवधानं ददतु यत् 2 x 3 + 1 =7 एका अभाज्यसङ्ख्या अस्ति। अत्र 2 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः एकस्मिन् गुणजे 1 योजयित्वा अभाज्यसङ्ख्यां प्राप्तवन्तः। किं भवन्तः एतादृशाः इतोऽपि अभाज्यसङ्ख्याः ज्ञातुं शक्नुवन्ति ?

उदाहरणम् 4 : 15 सङ्ख्यायाः लघुतराः अभाज्यसङ्ख्याः लिखन्तु।

समाधानम् : छलनी-विधिद्वारा प्राप्ताम् उपरि प्रदर्शित-सारिणीं दृष्ट्वा वयं सरलतया इष्टाः अभाज्यसङ्ख्याः लेखितुं शक्नुमः। अभाज्यसङ्ख्याः 2, 3, 5, 7, 11, 13 सन्ति।

समसङ्ख्याः अपि च विषमसङ्ख्याः

किं भवन्तः सङ्ख्यासु 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,.... एतासु किमपि प्रतिरूपं पश्यन्ति ? भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एतासु प्रत्येकम् अपि 2 इत्यस्याः एकः गुणजः अस्ति।

एताः एव सङ्ख्याः **समसङ्ख्याः** इति उच्यन्ते। शिष्टाः सर्वाः प्राकृतसङ्ख्याः 1, 3, 5, 7, 9, 11,

13, … इत्याद्याः **विषमसङ्ख्याः** इत्युच्यन्ते।

भवन्तः सरलतया परीक्षणं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् एका 2 अथवा 3 अङ्कानां सङ्ख्या समसङ्ख्या अस्ति अथवा न इति। 756482 इत्यादि-बृहत्-सङ्ख्यायाः विषये भवन्तः कथं ज्ञातुं शक्नुवन्ति ? किं 2 सङ्ख्यातः भागं कृत्वा ? किम् एषा प्रक्रिया कठिना न भविष्यति ?

अतः वयं वदामः यस्याः सङ्ख्यायाः एककस्थाने 0, 2, 4, 6, 8 एताः सङ्ख्याः भवन्ति ताः सङ्ख्याः समसङ्ख्याः भवन्ति। अतः 350, 4862 अपि च 59246 इत्येताः सङ्ख्याः समसङ्ख्याः सन्ति। 457, 2359 अपि च 8231 एताः सङ्ख्याः विषमसङ्ख्याः भवन्ति। आयान्तु , कियतः रुचिकरान् अंशान् ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः।

(a) लघुतरा समसङ्ख्या 2 अस्ति। लघुतमा अविभाज्यसङ्ख्या अपि 2 अस्ति। अतः लघुतमा अभाज्यसङ्ख्या 2 अस्ति या एका समसङ्ख्या अपि अस्ति।

(b) 2 इति सङ्ख्यायाः अग्रिम-अभाज्य-सङ्ख्याः 3, 5, 7, 11,.. सन्ति। अत्र कापि समसङ्ख्या दृश्यते किम् ? न , सर्वाः विषमसङ्ख्याः सन्ति। इतोऽपि अभाज्यसङ्ख्याः दृष्टुं प्रयत्नं कुर्वन्तु। अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः **यत् 2 इति सङ्ख्यां त्यक्त्वा सर्वाः अभाज्य-सङ्ख्याः विषमसङ्ख्याः सन्ति।**

अभ्यासः 3.2

1. वदन्तु यत् यदि द्वे अपि संख्ये समसंख्ये स्याताम् अथवा विषमसंख्ये स्यातां तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः योगः

   (a) किं समः भवति (b) विषमः भवति ?

2. अधोलिखितेषु कथनेषु किं कथनं सत्यम् अपि च किम् असत्यम् इति वदन्तु।

   a) तिसृणां विषमसङ्ख्यानां योगः समः भवति।
   b) द्वयोः विषमसंख्ययोः अपि च एकस्याः समसङ्ख्यायाः योगः समः भवति।
   c) तिसृणां विषमसङ्ख्यानां गुणनफलं विषमः भवति।
   d) यदि कामपि सङ्ख्यां 2 इति इत्यनेनसंख्यया भागं कर्तुं शक्नुमः तर्हि भागफलं सर्वदा विषमः भवति।
   e) सर्वाः अभाज्यसङ्ख्याः विषमसङ्ख्याः सन्ति।
   f) अभाज्यसङ्ख्यानां कोऽपि गुणनखण्डः न भवति।
   g) द्वयोः अभाज्यसंख्ययोः योगः सर्वदा समः भवति।
   h) केवलं 2 इति सङ्ख्या एव सम-अभाज्य- सङ्ख्या अस्ति।
   i) सर्वाः समसङ्ख्याः विभाज्यसङ्ख्याः सन्ति।
   j) द्वयोः समसंख्ययोः गुणनफलं सर्वदा समः भवति।

3. 13 अपि च 31 इति संख्ये अविभाज्यसंख्ये स्तः। द्वयोः अपि संख्ययोः अङ्कौ 1 अपि च 3 स्तः। 100 सङ्ख्या पर्यन्तं एतादृशान् युग्मान् अभिजानन्तु।

4. 20 सङ्ख्यायाः लघुतराः सर्वाः विभाज्यसङ्ख्याः अभाज्यसङ्ख्याः पृथक्कुर्वन्तु।

5. 1 अपि च 10 इत्येतयोः द्वयोः मध्ये विद्यमानां बृहत्तमां अभाज्यसङ्ख्यां लिखन्तु।

6. अधोलिखितसङ्ख्याः द्वयोः विषमसंख्ययोः योगस्य रूपेण लिखन्तु।

(a) 44 (b) 36 (c) 24 (d) 18

7. अभाज्यसङ्ख्यानां युग्मत्रयं लिखन्तु ययोः मध्ये 2 मात्रकम् अन्तरं भवेत्।
[द्वयोः अभाज्यसंख्ययोः अन्तरं 2 भवति तयोः कृते **अभाज्य-युग्मः इत्युच्यते** ।]

8. अधोलिखितासु सङ्ख्यासु काः अभाज्यसङ्ख्याः सन्ति ?

(a) 23 (b) 51 (c) 37 (d) 26

9. 100 इत्यनेन लघुतराः क्रमेण आगताः सप्त-भाज्यसङ्ख्याः लिखन्तु यासां मध्ये कापि अभाज्यसङ्ख्या न स्यात्।

10. अधोलिखिताः प्रत्येकं सङ्ख्याः तिसृणाम् अभाज्यसङ्ख्यानां योगरूपेण व्यक्तीकुर्वन्तु।

(a) 21 (b) 31 (c) 53 (d) 61

11. 20 इत्यनेन लघुतराणाम् अभाज्यसङ्ख्यानां तादृश-पञ्चयुग्मान् लिखन्तु ययोः योगः 5 इत्यनेन विभाजनं प्राप्नुयात्। (सङ्केतः : 3 + 7 = 10)

12. रिक्तस्थानं पूरयत।

a) यस्याः सङ्ख्यायाः केवलं गुणनखण्डद्वयम् एव अस्ति सा सङ्ख्या __________ इति उच्यते।

b) यस्याः सङ्ख्यायाः अधिकाः गुणनखण्डाः भवन्ति सा सङ्ख्या __________ इति उच्यते।

c) 1 इति सङ्ख्या __________ अपि नास्ति अपि च __________ अपि नास्ति।

d) लघुतमा अभाज्यसङ्ख्या __________ अस्ति।

e) लघुतमा भाज्यसङ्ख्या __________ अस्ति।

f) लघुतमा समसङ्ख्या __________ अस्ति।

3.4 सङ्ख्यानां विभाज्यतायाः निरीक्षणम्।

किं सङ्ख्या 38, 2 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? किमेषा 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? किमेषा 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

38 सङ्ख्यां वास्तविकरूपेण उक्तसङ्ख्याभिः विभाजिते सति एषा सङ्ख्या 2 इत्यनेन विभाज्या अस्ति न तु 4 अपि च 5 इत्यनेन इति ज्ञायते।

आयान्तु पश्यामः यत् वयं किमपि प्रतिरूपं ज्ञातुं शक्नुमः वा इति येन वयं वक्तुं शक्नुमः यत् कापि सङ्ख्या 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, अपि च 11 इत्यनेन विभाज्या अस्ति अथवा न इति। किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् वयं तादृशं प्रतिरूपं सरलतया द्रष्टुं शक्नुमः इति ?

10 इत्यनेनइत्यनया सङ्ख्यया विभाज्यता : चारूः 10 इत्यस्याः गुणजान् 10, 20, 30, 40, 50, 60,…इत्यादीन् पश्यन्ती स्म। सा अत्र एकं सर्वनिष्ठगुणं दृष्टवती। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति वा? एतासु प्रत्येकं सङ्ख्यासु एकाङ्क-स्थाने 0 इत्यङ्कः अस्ति ?

सा एङ्काक- स्थाने 0 इत्यङ्केन युक्तानाम् अन्यसङ्ख्यानां विषये अपि चिन्तितवती यथा 100, 1000, 3200, 7010। सा इदमपि ज्ञातवती यत् एताः सर्वाः सङ्ख्याः 10 इति सङ्ख्यया विभाज्याः वर्तन्ते।

अनेन प्रकारेण सा ज्ञातवती यत् **यदि कस्याः अपि सङ्ख्यायाः एककस्थाने 0 इत्यङ्कः भवति तर्हि सा सङ्ख्या 10 इत्यनेन विभाज्या भवति ।**

5 इत्यनेन विभाज्यता : मणिः सङ्ख्यासु 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... एतासु एकं रुचिकरं प्रतिरूपं प्राप्तवान् । किं भवन्तः एतत् प्रतिरूपं वक्तुं शक्नुवन्ति ? एतासु प्रत्येकं सङ्ख्यासु एककस्थाने 0 अथवा 5 इत्यङ्कः अस्ति । सः अवगतवान् यत् एताः सर्वाः सङ्ख्याः 5 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति ।

सः 5 इत्यनेन विभज्यमानाः अन्याः सङ्ख्याः स्वीकृतवान् यथा 105, 215, 6205, 3500 इत्यादयः । एतासु प्रत्येकं सङ्ख्यासु अपि एककस्थाने 0 अथवा 5 इत्यङ्कः अस्ति ।

सः 23, 56 अपि च 97 एताः सङ्ख्याः 5 इत्यनेन भागं कर्तुं प्रयत्नं कृतवान् । किं सः एतत् करिष्यति ? अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । सः पश्यति यत् यदि कस्याः अपि सङ्ख्यायाः एककस्थाने 0 अथवा 5 इत्यङ्कः भवति तर्हि सा सङ्ख्या 5 इत्यनेन विभाज्या भवति ।

किं 1750125 एषा सङ्ख्या 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

2 इत्यनेन विभाज्यता : चारूः 2 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणजान् 10, 12, 14, 16,... एवम् अन्यान् अपि गुणजान् 2410, 4356, 1358, 2972, 5974 एतान् पश्यति । एतेषु सा एकं प्रतिरूपं पश्यति । किं भवन्तः इदं प्रतिरूपं वक्तुं शक्नुवन्ति ? एतासां सङ्ख्यानाम् एककस्थाने 0, 2, 4. 6, 8 एते अङ्काः सन्ति ।

सा एताः सङ्ख्याः 2 इत्यनेन भागं करोति अपि च 0 इति शेषं प्राप्नोति ।

सा एतत् अपि जानाति यत् सङ्ख्याः 2467, 4829 एतादृशाः 2 इत्यनेन विभाज्याः न सन्ति । एतासां सङ्ख्यानां एककस्थाने 0, 2, 4. 6, 8 एते अङ्काः न सन्ति । अनेन आधारेण सा निष्कर्षेण वदति यत् यदि कस्याः अपि सङ्ख्यायाः एककस्थाने 0, 2, 4, 6, 8 इत्यङ्कः भवति तर्हि सा सङ्ख्या 2 इत्यनेन विभाज्या भवति ।

3 इत्यनेन विभाज्यता : किं सङ्ख्याः 21, 27, 36, 54 अपि च 219 एताः 3 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति ? आम् ।

किं सङ्ख्याः 25, 37 अपि च 260 एताः 3 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति ? न ।

3 इत्यनेन विभाज्यतां प्राप्तुं किं भवन्तः किमपि प्रतिरूपम् एककस्थाने द्रष्टुं शक्नुवन्ति ? वयं द्रष्टुं न शक्नुमः यतः एकाङ्क-स्थाने समान-अङ्काः भवन्ति चेदपि 3 इत्यनेन विभजिताः भवितुं काश्चन सङ्ख्याः अर्हन्ति काश्चन न अर्हन्ति अपि ।

यथा सङ्ख्या 27, 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति , परं सङ्ख्याः 17, 37 सङ्ख्या 3 इत्यनेन विभाज्याः न सन्ति । अधुना भवन्तः 21, 36, 54 अपि च 219 एतासां सङ्ख्यानाम् अङ्कान् योजयन्तु । किं भवन्तः अत्र किमपि विशेषं पश्यन्ति ? 2 + 1 = 3, 3 + 6 = 9, 5 + 4 = 9, 2 + 1 + 9 =12 । सर्वासां योगः 3 इत्यादयः इत्यनेन विभाज्यः अस्ति ।

25, 37, 260 इति एतासां सङ्ख्यानाम् अङ्कान् योजयन्तु । 2 + 5 = 7, 3 + 7 = 10, 2 + 6 + 0 = 8 इति प्राप्यते । अत्र तु कः अपि योगः 3 इत्यनेन विभाज्यः नास्ति ।

वयं वदामः यत् **यदि कस्याः अपि सङ्ख्यायाः अङ्कानां योगः 3 इत्यस्याः गुणजः अस्ति तर्हि सा सङ्ख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ।**

किं 7221 सङ्ख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

6 इत्यनेन विभाज्यता : किं भवन्तः कामपि तादृशसङ्ख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 2, 3 इतिद्वाभ्यां विभाज्या अस्ति ? एतादृशी एका सङ्ख्या 18 अस्ति। किं सङ्ख्या 18, 2 x 3 इत्यस्य गुणनफलं 6 इत्यनेन विभाज्या भविष्यति ? आम्, भविष्यति।

18 इत्येतादृश्यः अन्यसङ्ख्याः अभिजानन्तु अपि च परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किं ताः 6 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

किं भवन्तः कामपि तादृशसङ्ख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति यत् या 2 इत्यनेन विभाज्या स्यात् अपि च 3 इत्यनेन विभाज्या न स्यात् ?

अधुना एकां तादृशसङ्ख्यां लिखन्तु या 3 इत्यनेन विभाज्या स्यात् अपि च 2 इत्यनेन विभाज्या न स्यात्। एतादृशी एका सङ्ख्या 27 अस्ति।

किं 27 सङ्ख्या 6 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न। एतादृश-अन्य-सङ्ख्याः अपि ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

अनेन ज्ञायते यत् **यदि कापि सङ्ख्या 2 अपि च 3 द्वाभ्यामपि विभाज्या स्यात् सा सङ्ख्या 6 इत्यनेन अपि विभाज्या भवति।**

4 इत्यनेन विभाज्यता : किं भवन्तः अङ्कत्रयाणां कापि तादृश-सङ्ख्यां वक्तुं शक्नुवन्ति यत् 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। आम्, एतादृशी एका सङ्ख्या 212 अस्ति। अधुना कामपि अङ्कचतुष्टयात्मिकीं सङ्ख्यां वदन्तु या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। एतादृशी एका सङ्ख्या 1936 अस्ति।

212 इत्यस्याः एकक-दशक-स्थानस्य अङ्काभ्यां निर्मितां सङ्ख्यां पश्यन्तु। सा सङ्ख्या 12 अस्ति, या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति। 1936 इत्यस्याः एतादृशी सङ्ख्या तु 36 अस्ति। पुनः एषा अपि 4 इत्यनेन विभज्यते। इमां प्रक्रियां सङ्ख्यानां 4612; 3516; 9532 एतासाम् उपरि अपि कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु।

किं 286 सङ्ख्या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न। किं 86 सङ्ख्या 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न।

अतः वयं वदामः **यत् 3 अथवा अधिकाङ्कयुक्ता एका सङ्ख्या 4 इत्यनेन विभाज्या भवति यदि तस्याः अन्तिमाभ्यां द्वाभ्याम् अङ्काभ्यां निर्मित-सङ्ख्या 4 इत्यनेन विभाज्या स्यात्। एतस्य नियमस्य परीक्षणम् इतोऽपि 10 अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य कुर्वन्तु।**

1 अथवा 2 अङ्कयोः सङ्ख्या 4 इत्यनेन विभाज्यता भवति उत न इति परीक्षणं वास्तविकरूपेण 4 इत्यनेन विभाजनं कृत्वा करणीयम्।

8 इत्यनेन विभाज्यता : किं सङ्ख्याः 1000, 2104, 1416 एताः 8 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति ? आम्। एताः 8 इत्येनन विभाज्याः सन्ति।

एतासां सङ्ख्यानाम् एकक-दशक-शतक-स्थानस्य अङ्कैः निर्मित-सङ्ख्याः क्रमशः 000, 104 अपि च 416 सन्ति। एताः तिस्रः अपि सङ्ख्याः 8 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति। तादृश्यः इतोऽपि अन्यसङ्ख्याः अभिजानन्तु यासाम् अन्तिमैः त्रिभिः अङ्कैः निर्मिताः सङ्ख्याः 8 इत्यनेन विभाज्याः भवेयुः। उदाहरणार्थम् 9216, 8216, 7216, 10216, 9995216 इत्यादयः। एतासु सङ्ख्यासु भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् एताः सङ्ख्याः स्वयं 8 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

वयम् अभिजानीमः यत् **4 अथवा तदधिकाङ्कानां कापि सङ्ख्या 8 इत्यनेन विभाज्या भवति यदि अन्तिम-अङ्कत्रयेण निर्मित-सङ्ख्या 8 इत्यनेन विभाज्या स्यात्।**

किं 73512 सङ्ख्या 8 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

1, 2 अथवा 3 अङ्कानां सङ्ख्या 8 इत्यनेन विभज्या भवति उत न इति परीक्षितुं वास्तविकरूपेण भागं कृत्वा दृष्टव्यं भवति।

9 इत्यनेन विभाज्यता : 9 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणजाः 9, 18, 27, 36, 45, 54,… सन्ति अर्थात् एताः सङ्ख्याः 9 इत्यनेन विभज्याः सन्ति। काश्चन अन्याः सङ्ख्याः 4608, 5283 एतादृश्यः अपि 9 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

किं भवन्तः एतासां सङ्ख्यानां अङ्क-योगेन किमपि प्रतिरूपं पश्यन्ति ? आम्।

1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9,

4 + 6 + 0 + 8 = 18, 5 + 2 + 8 + 3 = 18

एतासु सर्वे योगाः 9 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

किं 758 सङ्ख्या 9 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? न।

अस्याः सङ्ख्यायाः अङ्कानां योगः 7 + 5 + 8 = 20 एषा सङ्ख्या 9 इत्यनेन विभाज्या नास्ति।

अनेन आधारेण वयं वदामः यत् **यदि कस्याः अपि सङ्ख्यायाः योगः 9 इत्यनेन विभज्यतां प्राप्नोति तर्हि सा सङ्ख्या 9 इत्यनेन विभाज्या भवति।**

11 इत्यनेन विभाज्यता : सङ्ख्याः 308, 1331 अपि च 61809 एताः प्रत्येकम् अपि 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

वयम् एकस्य कोष्ठकस्य निर्माणं कुर्मः अपि च पश्यामः यत् एतासां सङ्ख्यानाम् अङ्कैः किमपि प्रतिरूपं प्राप्यते वा इति।

सङ्ख्याः	दक्षिणतः विषमस्थानस्य अङ्कानां योगः	दक्षिणतः समस्थानस्य अङ्कानां योगः	द्वयोः मध्ये अन्तरम्
308	8 + 3 =11	0	11 – 0 = 11
1331	1 + 3 = 4	3 + 1 = 4	4 – 4 = 0
61809	9 + 8 + 6 = 23	0 + 1 = 1	23 – 1 = 22

वयं पश्यामः यत् प्रत्येकं स्थितौ अन्तरं 0 अस्ति अथवा 11 अस्ति। अपि च एताः सर्वाः सङ्ख्याः 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति।

सङ्ख्यायाः 5081 इत्यस्याः कृते, अङ्कानाम् अन्तरं (8 + 5) - (1 + 0) = 12 अस्ति या 11 इत्यनेन विभाज्या नास्ति। सङ्ख्या 5081 अपि 11 इत्यनेन विभाज्या नास्ति। परीक्षणं तु 5081 सङ्ख्यां 11 इत्यनेन भागं कृत्वा भवितुं शक्नोति।

अपि च कामपि सङ्ख्यां, **11 इत्यनेन विभाज्या अस्ति उत न इति द्रष्टुं दक्षिणतः विषमाङ्कानां योगः अपि च दक्षिणतः समसङ्ख्यानां योगः एतद्-द्वयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरं जानीयात्। यदि इदम् अन्तरं 0 अथवा 11 इत्यनेन विभाज्यं भवति तर्हि सा सङ्ख्या अपि 11 इत्यनेन विभाज्या अस्ति।**

अभ्यासः 3.3

1. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अधोलिखिताः सङ्ख्याः 2 इत्यनेन, 3 इत्यनेन, 4 इत्यनेन, 5 इत्यनेन, 6 इत्यनेन, 8 इत्यनेन, 9 इत्यनेन, 10 इत्यनेन अपि च 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति उत न इति अभिज्ञाय आम् अथवा न इति लिखतु।

सङ्ख्याः	विभाज्याः सन्ति								
	2 इत्यनेन	3 इत्यनेन	4 इत्यनेन	5 इत्यनेन	6 इत्यनेन	8 इत्यनेन	9 इत्यनेन	10 इत्यनेन	11 इत्यनेन
128	आम्	न	आम्	न	न	आम्	न	न	न
990	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1586	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
275	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6686	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
639210	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
429714	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2856	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3060	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
406839	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अभिजानन्तु यत् अधोलिखितासु काः सङ्ख्याः 4 इत्यनेन विभज्याः सन्ति अपि च काः सङ्ख्याः 8 इत्यनेन विभज्याः सन्ति।

(a) 572　(b) 726352　(c) 5500　(d) 6000
(e) 12159　(f) 14560　(g) 21084　(h) 31795072
(i) 1700　(j) 2150

3. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अभिजानन्तु यत् अधोलिखितासु काः सङ्ख्याः 6 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति इति।

(a) 297144　(b) 1258　(c) 4335　(d) 61233
(e) 901352　(f) 438750　(g) 1790184　(h) 12583
(i) 639210　(j) 17852

4. विभाज्यतायाः परीक्षण-नियमानां प्रयोगं कृत्वा अभिजानन्तु यत् अधोलिखितासु काः सङ्ख्याः 11 इत्यनेन विभाज्याः सन्ति इति।

(a) 5445　(b) 10824　(c) 7138965
(d) 70169308　(e) 10000001　(f) 901153

5. रिक्तस्थानेषु लघुतमं तथा बृहत्तमम् अङ्कं लिखन्तु येन सङ्ख्या 3 इत्यनेन विभाज्या स्यात्।

(a) _____ 6724 (b) 4765 _____ 2

6. अधोलिखितेषु रिक्तस्थानं तादृश-अङ्केन पूरयन्तु यत् सङ्ख्या 11 इत्यनेन विभाज्या स्यात्।

(a) 92 _____ 389 (b) 8 ______ 9484

3. 5 सामान्य-गुणनखण्डः अपि च सामान्य-गुणजः

कासाञ्चन सङ्ख्यानां युग्मस्य गुणनखण्डान् पश्यन्तु।

(a) 4 अपि च 18 एतयोः गुणनखण्डाः के सन्ति ?

4 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2 अपि च 4

18 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 6, 9 अपि च 18

4 अपि च 18 एतद्द्वयोः गुणनखण्डः : 1 अपि च 2 अस्ति।

अथवा 4 अपि च 18 एतयोः द्वयोः सामान्यः गुणनखण्डः अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितयुग्मानां सामान्यगुणनखण्डं लिखन्तु।

(a) 8, 20 (b) 9, 15

(b) 4 अपि च 15 एतयोः सामान्य-गुणनखण्डः कः ?

एतयोः द्वयोः संख्ययोः कृते केवलं 1 समान्यः गुणनखण्डः अस्ति।

7 अपि च 16 एतयोः सामान्य-गुणनखण्डः कः ?

द्वे संख्ये ययोः केवलं 1 एव सार्व-गुणनखण्डः अस्ति तर्हि ते स-अभाज्यसंख्ये इत्युच्येते। 4 अपि च 15 स-अभाज्यसंख्ये स्तः। किं 7 अपि च 15, 12 अपि च 49, 18 अपि च 23 एते युग्माः स-अभाज्यसङ्ख्याः सन्ति ?

(c) किं वयं 4,12 अपि च 16 एतासां सामान्य-गुणनखण्डं ज्ञातुं शक्नुमः ?

4 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2 अपि च 4 अस्ति।

12 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 4, 6 अपि च 12 अस्ति।

16 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 4, 8 अपि च 16 अस्ति।

स्पष्टतया 4,12 अपि च 16 एतासां सामान्य-गुणनखण्डः 1, 2 अपि च 4 अस्ति।

अधोलिखितस्य गुणनखण्डान् जानन्तु।

(a) 8, 12, 20 (b) 9, 15, 21

आयान्तु, अधुना अधिकसङ्ख्यानां गुणजान् समानकाले एव स्वीकृत्य पश्यन्तु।

(a) 4 अपि च 6 इत्येतयोः गुणजाः के सन्ति ?

4 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... (इतोऽपि काञ्चन गुणजान् लिखन्तु)

6 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 6, 12, 18, 24, 30, 36,...(इतोऽपि काञ्चन गुणजान् लिखन्तु)

एतासु किं तादृश्यः सङ्ख्याः सन्ति याः द्वयोः सूच्योः मध्ये अपि सन्ति ? वयं पश्यामः यत् 12, 24, 36, ... एते 4 अपि च 6 द्वयोः अपि गुणजाः सन्ति।

किं भवन्तः एतादृशान् इतोऽपि गुणजान् लेखितुं शक्नुवन्ति ?

एते तु 4 अपि च 6 इत्येतयोः द्वयोः सामान्य-गुणजाः इति कथ्यन्ते।

(b) 3, 5 अपि च 6 एतासां सामान्य-गुणजं जानन्तु ।

3 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ... ।

5 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... ।

6 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 6, 12, 18, 24, 30, ... ।

3, 5 अपि च 6 एतासां सामान्य-गुणजाः : 30, 60, 90 सन्ति ।

3, 5 अपि च 6 एतासां सङ्ख्यानाम् इतोऽपि काञ्चन सामान्य-गुणजान् लिखन्तु ।

उदाहरणम् 5 : 75, 60 अपि च 210 एतासां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ।

समाधानम् : 75 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 3, 5, 15, 25, अपि च 75 अस्ति ।

60 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 अपि च 60 अस्ति ।

210 इत्यस्याः गुणनखण्डः : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 अपि च 210 अस्ति ।

अनेन प्रकारेण 75, 60 अपि च 210 एतासां सामान्य-गुणनखण्डाः 1, 3, 5, 15 सन्ति ।

उदाहरणम् 6 : 75, 60 अपि च 210 एतासां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ।

समाधानम् : 3, 4 अपि च 9 एतासां सामान्य-गुणजान् जानन्तु ।

3 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, ... ।

4 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, ... ।

9 इत्यस्याः गुणजाः सन्ति : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ... ।

स्पष्टतः 3, 4 अपि च 9 एतासां सामान्य-गुणजाः सन्ति : 36, 72, 108, ... ।

अभ्यासः 3.4

1) अधोलिखितानां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ।

(a) 20 अपि च 28 (b) 15 अपि च 25

(c) 35 अपि च 50 (d) 56 अपि च 120

2) अधोलिखितानां सामान्य-गुणनखण्डान् अभिजानन्तु ।

(a) 4, 8 अपि च 12 (b) 5, 15 अपि च 25

3) अधोलिखितानां त्रीन् सामान्य-गुणजान् अभिजानन्तु ।

(a) 6 अपि च 8 (b) 12 अपि च 18

4) 100 इत्यस्मात् न्यूनाः, 3 अपि च 4 एतयोः सर्वान् गुणजान् लिखन्तु ।

5) अधोलिखितासु काः सङ्ख्याः साभाज्याः सन्ति ?

(a) 18 अपि च 35 (b) 15 अपि च 37 (c) 30 अपि च 415

(d) 17 अपि च 68 (e) 216 अपि च 215 (f) 81 अपि च 16

6) एका सङ्ख्या 5 अपि च 12 इत्यनेन विभाज्या अस्ति । कया अन्यया संख्यया एषा सङ्ख्या सदैव विभाजिता भवति ?

7) एका सङ्ख्या 12 इत्यनेन विभाज्या अस्ति । इतोऽपि काः सङ्ख्याः सन्ति याभिः एषा सङ्ख्या विभाज्या भवति ?

3. 6 विभाज्यतायाः इतोऽपि अन्ये नियमाः

आयान्तु, विभाज्यतायाः इतोऽपि अन्यान् नियमान् पश्यामः ।

(i) किं भवन्तः 18 इत्यस्याः एकं गुणनखण्डं वक्तुं शक्नुवन्ति ? एषः 9 अस्ति । 9 इति सङ्ख्यायाः एकं गुणनखण्डं लिखन्तु । एषः 3 अस्ति । किं 18 सङ्ख्यायाः एकः गुणनखण्डः 3 अस्ति ? आम् । 18 इत्यस्याः अन्यम् एकं गुणनखण्डं लिखन्तु । एषः 6 अस्ति । किं 6 इत्यस्याः एकं गुणनखण्डं वदन्ति ? एषः 2 अस्ति । एषः 18 इत्यस्याः अपि एकः गुणनखण्डः अस्ति अर्थात् 18 सङ्ख्यां विभजति । 18 सङ्ख्यायाः अन्यान् गुणनखण्डं स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

इमां प्रक्रियां 24 कृते अपि कुर्वन्तु । एषा सङ्ख्या 8 इत्यनेन विभाज्या अस्ति । सहैव 24 सङ्ख्या, 8 इत्यस्याः 1, 2, 4 अपि च 8 एतैः सर्वैः गुणनखण्डैः विभाज्या अस्ति ।

अनेन वयं वदामः यत् **यदि कापि सङ्ख्या एकया संख्यया विभाज्या अस्ति तर्हि सा सङ्ख्या अस्याः सङ्ख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डेन अपि विभाज्या भवति ।**

(ii) सङ्ख्या 80 सङ्ख्याभ्यां 4 अपि च 5 इति द्वाभ्यां विभाज्या अस्ति । एषा 4 x 5 = 20 इत्यनेन अपि विभाज्या अस्ति तथा 4 अपि च 5 साभाज्य-संख्ये स्तः ।

अनेन प्रकारेण सङ्ख्या 60 साभाज्य-सङ्ख्याभ्यां 3 अपि च 5 इत्याभ्यां विभाज्या अस्ति । 60, गुणनफलाभ्यां 3 x 5 = 15 एताभ्यामपि विभाज्या अस्ति ।

अनेन वयं वदामः यत् **यदि कापि सङ्ख्या द्वाभ्यां स-अभाज्यसङ्ख्याभ्यां विभाज्या अस्ति तर्हि सा तस्याः सङ्ख्यायाः गुणनफलेनापि विभाज्या अस्ति ।**

(iii) द्वे संख्ये 16 अपि च 20 सङ्ख्ये, 4 इत्यनेन विभाज्ये स्तः । सङ्ख्या 16 + 20 = 36 अपि 4 इत्यनेन विभाज्या अस्ति । सङ्ख्यानाम् अन्यान् युग्मान् स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।

16 अपि च 20 एतयोः अन्य-सामान्य-गुणनखण्डान् स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । अनेन प्रकारेण ज्ञायते यत् **यदि दत्त-सङ्ख्याद्वयं कया अपि सङ्ख्यया विभाज्यं भवति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः योगः अपि तया सङ्ख्यया सह विभाज्यः भविष्यति ।**

(iv) द्वे संख्ये 35 अपि च 20, सङ्ख्या 5 इत्यनेन विभाज्ये स्तः । किम् एतयोः अन्तरम् 35 – 20 = 15 अपि 5 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ? सङ्ख्यानां अन्यान् अपि युग्मान् स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु । अनेन प्रकारेण **यदि दत्त-सङ्ख्याद्वयं कयापि संख्यया विभाज्यतां प्राप्नोति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः अन्तरम् अपि तया विभाज्यतां प्राप्नोति ।**

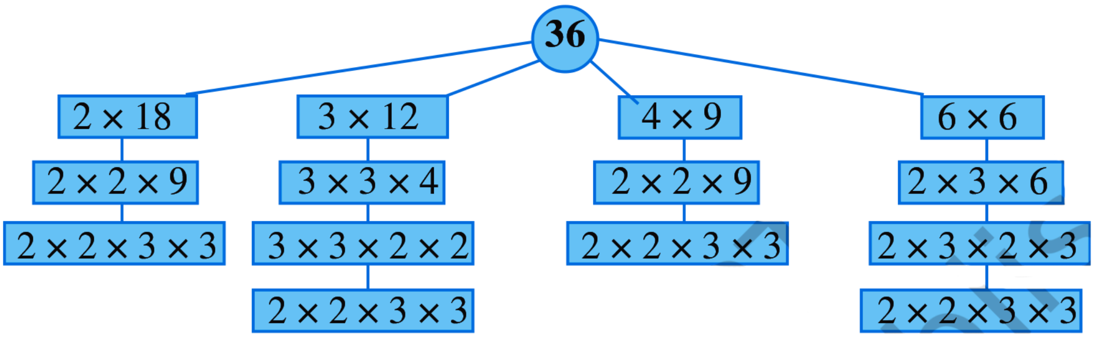
3. 7 अभाज्य-गुणनखण्डनम्

यदि कामपि सङ्ख्यां तस्याः गुणनखण्डानां गुणनफलरूपेण अभिलेखितुं शक्नुमः तर्हि वयं तां सङ्ख्यां गुणनखण्डितां कृतवन्तः अथवा तस्याः गुणनखण्डं कृतवन्तः इति वदामः । अनेन प्रकारेण यदि वयं 24 = 3 x 8 लिखामः तर्हि वयं वदामः यत् वयं 24 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डान् कृतवन्तः इति । एषः 24 इत्यस्याः गुणनखण्डनेषु एकः गुणनखण्डः अस्ति । अस्याः अन्य-गुणनखण्डनानि च अपि सन्ति ।

24 = 2 x 12 = 2 x 2 x 6 = 2 x 2 x 2 x 3	24 = 4 x 6 = 2 x 2 x 6 = 2 x 2 x 2 x 3	24 = 3 x 8 = 3 x 2 x 2 x 2 = 2 x 2 x 2 x 3

24 इति सङ्ख्यायाः सर्वेषु गुणनखण्डनेषु अन्ते वयम् एकम् एव गुणनखण्डनं 2 x 2 x 2 x 3 प्राप्नुमः। अस्मिन् गुणनखण्डने केवलं 2 अपि च 3 एव गुणनखण्डः अस्ति।

आयान्तु, अस्य परीक्षणं 36 स्वीकृत्य कुर्मः।



36 इत्यस्याः अभाज्य-गुणनखण्डनं 2 x 2 x 3 x 3 अस्ति। एतत् 36 इत्यस्याः अन्तिमम् एकम् अभाज्य-गुणनखण्डनम् अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

16, 28 अपि च 38 एतासाम् अभाज्य-गुणनखण्डनं लिखन्तु।

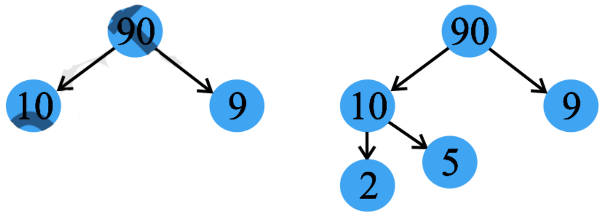
एतत् कुर्वन्तु

गुणनखण्डस्य वृक्षः

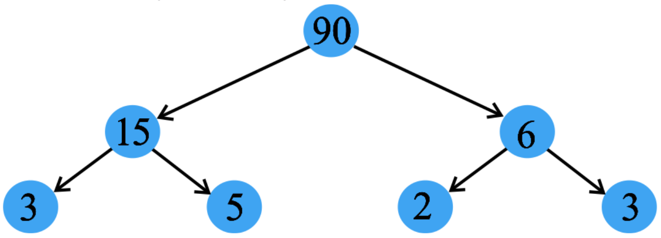
कामपि सङ्ख्यां स्वीकुर्वन्तु अपि च लिखन्तु : 90

अस्याः कमपि गुणनखण्डस्य युग्मं चिन्तयन्तु यथा 90 = 15 x 6

इदानीं 15 इति सङ्ख्यायाः एकं गुणनखण्डस्य युग्मं चिन्तयन्तु यथा 15 = 3 x 5



6 इति सङ्ख्यायाः गुणनखण्डनस्य युग्मं लिखन्तु।



एवमेव अधोलिखिताः सङ्ख्याः अपि स्वीकृत्य लिखन्तु।

(a) 8 (b) 12

उदाहरणम् 5 : 980 इति सङ्ख्यायाः अभाज्य-गुणखण्डनम् अभिजानन्तु।

समाधानम् : वयम् अपि च क्रमेण लिखामः।

वयं सङ्ख्यां 980 इत्याख्यां 2, 3, 5, 7 इत्यादिक्रमेण वारं वारं भागं कुर्मः। इमां प्रक्रियां वयं तावत्पर्यन्तं कुर्मः यावत्पर्यन्तं भागफलम् अनेन विभाजितं भवेत्।

2	980
2	490
5	245
7	49
7	7
	1

अनेन प्रकारेण 980 इति सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः अस्ति : 980 = 2 x 2 x 5 x 7 x 7

अभ्यासः 3.5

1 अधोलिखितासु पङ्क्तिषु किं कथनं सत्यं किं च असत्यम् इति अभिजानन्तु।

(a) यदि कापि सङ्ख्या 3 इत्यनेन विभाज्या अस्ति, तर्हि सा 9 इत्यनेन अपि विभाज्या भवति।

(b) यदि कापि सङ्ख्या 9 इत्यनेन विभाज्या अस्ति, तर्हि सा 3 इत्यनेन अवश्यं विभाज्या भवति।

(c) एका सङ्ख्या 18 इत्यनेन विभाज्या भवति यदि सा सङ्ख्या 3 अपि च 6 इत्यनेन विभाज्या भवति।

(d) यदि एका सङ्ख्या 9 अपि च 10 इत्यनेन विभज्या भवति तर्हि 90 इत्यनेन अपि विभाज्या भवति।

(e) यदि द्वे संख्ये साभाज्ये स्तः तर्हि द्वयोः एका सङ्ख्या तु अवश्यं अभाज्या भवति।

(f) 4 इत्यनेन विभाज्याः सर्वाः सङ्ख्याः 8 इत्यनेन अपि विभाज्याः भवेयुः।

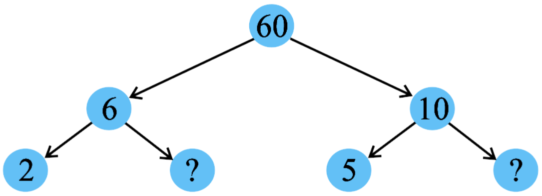
(g) 8 इत्यनेन विभाज्याः सर्वाः सङ्ख्याः 4 इत्यनेन अपि विभाज्याः भवेयुः।

(h) यदि कापि सङ्ख्या सङ्ख्याद्वयं पृथक्तया सम्पूर्णं विभजति तर्हि सा सङ्ख्या तयोः योगस्यापि विभाजनं करोति।

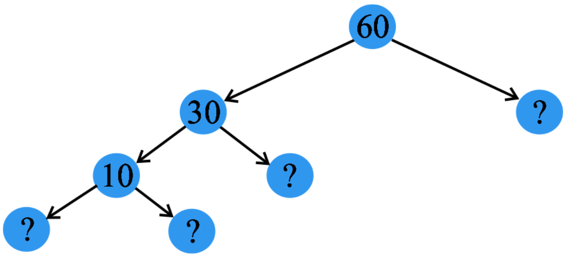
(i) यदि कापि सङ्ख्या द्वयोः संख्ययोः योगं सम्पूर्णतया विभाजयति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः पृथक्तया अपि विभाजनं करोति।

2 अत्र 60 सङ्ख्यायाः कृते भिन्न-गुणनखण्ड-वृक्षौ स्तः। अत्र रिक्तस्थानं पूरयन्तु।

(a)



(b)



3) एकस्याः भाज्यसङ्ख्यायाः अभाज्यगुणनखण्डने केषां गुणनखण्डानां सम्मेलनं न भवति ?

4) अङ्कचतुष्टयात्मिकां बृहत्तमां सङ्ख्यां लिखन्तु अपि च ताम् अभाज्यगुणनखण्डस्य एकेन रूपेण दर्शयन्तु ।

5) पञ्च-अङ्कानां लघुतमां सङ्ख्यां लिखन्तु अपि च ताम् अभाज्यगुणनखण्डस्य एकेन रूपेण दर्शयन्तु ।

6) 1729 सङ्ख्यायाः सर्वान् अभाज्यगुणनखण्डान् अभिजानन्तु अपि च तान् आरोहणक्रमे लिखन्तु । अधुना द्वयोः क्रमागत-अभाज्य-गुणनखण्डयोः मध्ये यदि कश्चन सम्बन्धः अस्ति तर्हि लिखन्तु ।

7) तिसृणां क्रमागत-सङ्ख्यानां गुणनफलं सदैव 6 इत्यनेन विभाजनं प्राप्नोति । इदं कथनं केषाञ्चन उदाहरणानां साहाय्येन स्पष्टीकुर्वन्तु ।

8) द्वयोः क्रमागत-विषमसंख्ययोः योगः 4 इत्यनेन विभाजनं प्राप्नोति । इदं कथनं केषाञ्चन उदाहरणानां साहाय्येन स्पष्टीकुर्वन्तु ।

9) अधोलिखितेषु केषु व्यञ्जकेषु अभाज्य-गुणनखण्डः कृतः ?

(a) 24 = 2 x 3 x 4 (b) 56 = 1 x 7 x 2 x 2 x 2

(c) 70 = 2 x 5 x 7 (d) 54 = 2 x 3 x 9

10) भागेन विना एव अभिजानन्तु यत् किं 25110 सङ्ख्या 45 इत्यनेन विभाज्या अस्ति ?

[सङ्केतः : 5 अपि च 9 साभाज्ये संख्ये स्तः । दत्तसङ्ख्यानां विभाजनं 5 अपि च 9 सङ्ख्याभ्यां भवति अथवा न भवति इत्यस्य परीक्षणं कुर्वन्तु ।]

11) सङ्ख्या 18, 2 अपि च 3 इत्येताभ्याम् विभाज्या अस्ति । सा सङ्ख्या 2 x 3 = 6 इत्यनया अपि विभाज्या अस्ति । अनेन प्रकारेण एका सङ्ख्या 4 अपि च 6 इत्येताभ्याम् विभाज्या अस्ति । किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् सा सङ्ख्या 4 x 6 = 24 इत्यनया अपि विभाज्या भवति ? यदि न भवति तर्हि स्व-उत्तरस्य पुष्ट्यर्थम् एकम् उदाहरणं ददतु ।

12) अहं 4 इति सङ्ख्या विभिन्न-अभाज्य-गुणनखण्डयुक्ता लघुतमा सङ्ख्या अस्मि । किं भवन्तः माम् अवगन्तुं शक्नुवन्ति?

3.8 महत्तमः सामान्यः अपवर्तकः

वयं द्वयोः संख्ययोः सामान्य-गुणनखण्डम् अभिज्ञातुं शिक्षितवन्तः । अधुना वयं एतेषु सामान्यगुणनखण्डेषु बृहत्तमं गुणनखण्डं ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः ।

12 अपि च 16 संख्ययोः समान्यगुणनखण्डाः के ? एते 1, 2 अपि च 4 सन्ति ।

एतेषु सामान्यगुणनखण्डेषु बृहत्तमः कः ? एषः 4 अस्ति । 20, 28 अपि च 36 एतासां समान्यगुणनखण्डाः के ? एते 1, 2 अपि च 4 सन्ति । अत्र बृहत्तमः 4 अस्ति ।

द्वयोः अथवा अधिकानां दत्तसङ्ख्यानां सामान्यगुणनखण्डेषु बृहत्तमः सामान्यः गुणनखण्डः दत्तसङ्ख्यानां महत्तमः सामान्यः अपवर्तकः इत्युच्यते । महत्तम-सामान्य-अपवर्तकं संक्षेपेण म.सा.अ. इत्यपि लिखामः । अमुं महत्तमः समान्यः विभाजकः इत्यपि कथयन्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अधोलिखितानां महत्तमसमापवर्त्तकम् अभिजानन्तु ।

(i) 24 36 (ii) 15, 25 30

(iii) 8 12 (iv) 12, 16 28

सङ्ख्यानां 20, 28 अपि च 36 एतासां म.सा.अ. एतासां सङ्ख्यानां अभाज्य-गुणनखण्डन-द्वारा अभिज्ञातुं शक्यते ।

2	20
2	10
5	5
	1

2	28
2	14
7	7
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

अनेन प्रकारेण,

$$20 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5$$
$$28 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 7$$
$$36 = \boxed{2} \times \boxed{2} \times 3 \times 3$$

20, 28 अपि च 36 एतासु सङ्ख्यासु सामान्य-गुणनखण्डः अस्ति 2 ।

अतः 20, 28 अपि च 36 एतासु सङ्ख्यानां म.सा.अ. 2 x 2 = 4 भवति ।

अभ्यासः 3.6

1) अधोलिखितानां सङ्ख्यानां म.सा.अ. अभिजानन्तु ।

(a) 18, 48 (b) 30, 42 (c) 18, 60 (d) 27, 63

(e) 36, 84 (f) 34, 102 (g) 70, 105, 175 (h) 91, 112, 49

(i) 18, 54, 81 (j) 12, 45, 75

2) अधोलिखितानां म.सा.अ. कः ?

(a) क्रमागतं सङ्ख्याद्वयम् (b) क्रमागतं समसङ्ख्याद्वयम् (c) क्रमागतं विषमसङ्ख्याद्वयम्

3) अभाज्य-गुणनखण्डन-द्वारा द्वयोः साभाज्य-संख्ययोः 4 अपि च 15 एतद्द्वयोः म.सा.अ. अनेन प्रकारेण अभिज्ञातः । यथा

4 = 2 x 2 अपि च 15 = 3 x 5

यतो हि अस्मिन् गुणनखण्डे कोऽपि अभाज्य-सामान्य-गुणनखण्डः नास्ति इत्यतः 4 अपि च 15 एतयोः म.सा.अ. शून्यम् अस्ति । किम् इदम् उत्तरं सम्यक् अस्ति ? यदि नास्ति तर्हि समुचितम् उत्तरं किं भवेत् ?

3.9 लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः

4 अपि च 6 एतयोः समान्य-गुणजाः के ? एते 12, 24, 36, ... सन्ति। एतेषु लघुतमः गुणजः कः ? एषः 12 अस्ति। वयं वदामः यत् 4 अपि च 6 एतयोः लघुतमः गुणजः अथवा लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः 12 अस्ति। एषा तु सा लघुतमा सङ्ख्या अस्ति या द्वयोः अपि गुणजत्वेन अस्ति।

द्वयोः अथवा अधिकानां दत्तसङ्ख्यानां लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः एतासां सङ्ख्यानां सामान्य-गुणजेषु लघुतमः गुणजः एव अस्ति। संक्षेपेण अमुं ल.सा.अ. इति लिखामः।

8 अपि च 12 एतयोः ल.सा.अ. कः अस्ति ? 4 अपि च 9 एतयोः ल.सा.अ. कः अस्ति ? 6 अपि च 9 एतयोः ल.सा.अ. कः अस्ति ?

उदाहरणम् 8 : 12 अपि च 18 एतयोः ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : वयं जानीमः यत् 12 अपि च 18 एतयोः सामान्य-गुणजाः 36, 72, 108 इत्यादयः सन्ति। लघुतमा 18 अस्ति। आयान्तु अन्येन एकेन विधिना उत्तरं प्राप्नुमः।

12 अपि च 18 एतयोः अभाज्य-गुणनखण्डनम् एवम् अस्ति।

$12 = 2 \times 2 \times 3$ $\quad$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

एतेषु अभाज्य-गुणनखण्डनेषु अभाज्य-गुणनखण्डः 2 द्विवारम् आगतः। अपि च अभाज्य-गुणनखण्डः 3 अपि द्विवारम् आगतः। द्वयोः संख्ययोः ल.सा.अ. तेषाम् अभाज्य-गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति ये तासु अधिकवारम् आगच्छन्ति। अतःएतासां सङ्ख्यानां ल.सा.अ. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ अस्ति।

उदाहरणम् 9 : 24 अपि च 90 एतयोः ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : 24 अपि च 90 एतयोः अभाज्य-गुणनखण्डनम् अपि च अस्ति।

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $\quad$ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

एतेषु अभाज्य-गुणनखण्डनेषु, गुणनखण्डः 2 त्रिवारम् आतः। अभाज्य- गुणनखण्डः3 द्विवारम् आगतः। अपि च अभाज्य-गुणनखण्डः 5 केवलम् एकवारं 90 मध्ये आगइत्यनेन।

अतः इष्टः ल.सा.अ. $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 360$

उदाहरणम् 10 : 40, 48 अपि च 45 एतासां ल.सा.अ. अभिजानन्तु।

समाधानम् : 40, 48 अपि च 45 एतासाम् अभाज्य-गुणनखण्डनम् अपि च अस्ति।

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$45 = 3 \times 3 \times 5$

अभाज्य-गुणनखण्डः 2 अधिकाधिकं चतुर्वारम् आगतः, अभाज्य-गुणनखण्डः 3 अधिकाधिकं द्विवारं आगतः अपि च 5 एकवारम् एव आगतः।

अतः इष्टं-ल.सा.अ. $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 720$

लघुतम-सामान्य-अपवर्त्यम् अधोलिखितेन अन्यविधिना अपि अभिज्ञातुं शक्यते।

उदाहरणम् 11 : 20, 25 अपि च 30 एतासां ल.सा.अ. अभिजानन्तु ।

समाधानम् : वयं सङ्ख्याः अधोलिखितप्रकारेण एकस्यां पङ्क्तौ लिखामः ।

2	20	25	30	**(a)**
2	10	25	15	**(b)**
3	5	25	15	**(c)**
5	5	25	5	**(d)**
5	1	5	1	**(e)**
	1	1	1	

अतः ल.सा.अ = 2 x 2 x 3 x 5 x 5 = 300

(a) लघुतमया अभाज्यसंख्यया 2 इत्यनया विभाजनं कुर्वन्तु । 25 सङ्ख्या 2 इत्यनया विभाज्या नास्ति । अतः ताम् अग्रिमपङ्क्तौ यथा अस्ति तथैव लिख्यते।

(b) पुनः 2 इत्यनया विभाजनं कुर्वन्तु । प्रक्रियाम् अग्रे नयन्तु यावत् पर्यन्तं 2 इत्यस्याः गुणजः लभ्यते ।

(c) अग्रिम-अभाज्यसंख्यया 3 इत्यनया सङ्ख्यया भागं कुर्वन्तु ।

(d) अग्रिम-अभाज्यसंख्यया 5 इत्यनया भागं कुर्वन्तु ।

(e) पुनः 5 इत्यनया संख्यया भागं कुर्वन्तु ।

3.10 म.सा.अ. अपि च ल.सा.अ. एतयोः कृते अन्यानि उदाहरणानि

अस्माभिः अनेकेषु सन्दर्भेषु म.सा.अ. अपि च ल.सा.अ अनयोः प्रयोगः क्रियते । वयम् उदाहरणैः सह एतत् कथनं स्पष्टीकुर्मः ।

उदाहरणम् 12 : द्वयोः टैङ्कर्-यानयोः मध्ये क्रमशः 850 लीटर् अपि च 680 लीटर-मृत्तिकातैलम् आगच्छति । तस्य पात्रस्य अधिकतमां धारिताम् अभिजानन्तु येन द्वयोः अपि टैङ्कर्-यानयोः तैलं सम्पूर्णं मापितं भवति ।

समाधानम् : इष्ट-पात्रेण द्वयोः अपि टैङ्कर्-यानयोः तैलं सम्पूर्णतया मापनीयम् अस्ति । अतः अस्य धारिता द्वयोः टैङ्कर्-यानयोः धारितानां एका संपूर्ण-विभाजिका अस्ति । सहैव अस्य धारिता अधिकतया अपि भवेत्। अतः अस्य पात्रस्य अधिकतमा धारिता 850 अपि च 680 एतयोः म.सा.अ. भवति । इदम् अधोलिखितरीत्या ज्ञातुं शक्नुमः ।

2	850
5	425
5	85
17	17
	1

2	680
2	340
2	170
5	85
17	17
	1

अतः ,

850 = 2 x 5 x 5 x 17	=	2	x	5	x	17	x	5
680 = 2 x 2 x 2 x 5 x 17	=	2	x	5	x	17	x	2 x 2

850 अपि च 680 एतयोः सामान्यगुणनखण्डाः 2, 5 अपि च 17 सन्ति।

अतः 850 अपि च 680 एतयोः म.सा.अ. = 2 x 5 x 17 = 170 अस्ति।

अतः इष्ट-पात्रस्य अधिकतम-धारिता 170 लीटर् अस्ति। एषा प्रथम-पात्रं 5-वारं द्वितीयं 4-वारं सम्पूर्णं मापयति।

उदाहरणम् 13 : प्रातःकालीन-पर्यटने त्रयः जनाः सहैव चलनस्य आरम्भं कुर्वन्ति। तेषां पादाभ्यां मध्ये विद्यमान-दैर्घ्यं क्रमशः 80 सेमी, 85 सेमी अपि च 90 सेमी अस्ति। एतेषु प्रत्येकं जनः न्यूनतमं कियत् दूरं चलेत् यत् सः तं मार्गं सम्पूर्णतया पूर्णं कुर्यात्।

समाधानम् : प्रत्येकं जनैः चलितदूरं समानम् अपि च न्यूनतमं भवेत्। इदम् अभिलषितं न्यूनतमं दूरं यत् प्रत्येकं जनैः चलितं स्यात्, तत् दूरं तेषां पादयोः मापस्य लघुतमः सामान्यः अपवर्त्यः भवति। किं भवन्तः अत्र कारणं वक्तुं शक्नुवन्ति ?

अतः वयं 80, 85 अपि च 90 एतासां ल.सा.अ. अभिजानीमः। 80, 85 अपि च 90 एतासां ल.सा.अ. 12240 अस्ति।

अतः इष्ट न्यूनतमं दूरम् = 12240 अस्ति।

उदाहरणम् 13 : तां लघुतमां सङ्ख्याम् अभिजानन्तु यां 12, 16, 24 अपि च 36 इत्येताभिः भागकरणेन प्रत्येकं सन्दर्भे 7 शेषः भवति।

समाधानम् : वयं 12, 16, 24 अपि च 36 एतासां ल.सा.अ. अधोलिखितप्रकारेण अभिजानीमः।

2	12	16	24	36
2	6	8	12	18
2	3	4	6	9
2	3	2	3	9
3	3	1	3	9
3	1	1	1	3
	1	1	1	1

अनेन प्रकारेण ल.सा.अ. = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = 144

144 एषा सङ्ख्या सा लघुतमा सङ्ख्या अस्ति यां 12, 16, 24 अपि च 36 एताभिः विभाजनेन प्रत्येकं सन्दर्भे 0 शेषः भवति।

परन्तु अस्माकं कृते तादृशी सङ्ख्या अपेक्षिता अस्ति यत्र प्रत्येकं सन्दर्भे विभाजनेन 7 शेषफलरूपेण भवेत्।

अनेन इष्ट-सङ्ख्या 144 इत्यनेन 7 अधिका स्यात्।

अनेन प्रकारेण इच्छित-लघुतमा-सङ्ख्या = 144 + 7 = 151 अस्ति।

अभ्यासः 3.7

1. रेणुः 75 कि.ग्रा. अपि च 69 किग्रा भारयुक्ताम् उर्वरकस्य गोणीं क्रीणाति। भारयुक्तायाः तस्याः मापकशिलायाः अधिकतमं मानम् अभिजानन्तु या गोणिद्वयमपि सम्पूर्णं मापयति।
2. त्रयः बालकाः एकस्मात् स्थानात् चलनं प्रारभन्ते। तेषां पादयोः मापः क्रमशः 63 सेमी, 70 सेमी अपि च 77 सेमी अस्ति। एतेषां प्रत्येकं बालकः कियतीं न्यूनतमदूरीं क्रमेत् यत् ते तां दूरीं सम्पूर्णतया पूरयेयुः।
3. एकस्य प्रकोष्ठस्य दीर्घता, वैशाल्यम् एवम् औन्नत्यं क्रमशः 825 सेमी, 675 सेमी अपि च 450 सेमी अस्ति। तादृश पट्टबन्धम् अभिजानन्तु यः प्रकोष्ठस्य त्रयाणामपि विमानां मापनं कुर्यात्।
4. 6, 8 अपि च 12 एताभिः सङ्ख्याभिः विभाज्याम् अङ्कत्रयात्मिकाम् एकां लघुतमां सङ्ख्याम् अभिजानन्तु।
5. 8, 10 अपि च 12 एताभिः सङ्ख्याभिः विभाज्यां अङ्कत्रयात्मिकाम् एकां बृहत्तमां सङ्ख्याम् अभिजानन्तु।
6. विभिन्नानां त्रयाणां मार्गाणां यातायात-सम्मर्द-दीपाः क्रमशः प्रत्येकं 48 क्षणानि, 72 क्षणानि अपि च 108 क्षणानि अनन्तरं परिवर्तन्ते। यदि ते दीपाः सहैव प्रातः 7 वादने परिवर्तन्ते तर्हि ते पुनः सहैव कदा परिवर्तन्ते।
7. त्रिषु टैङ्कर्-यानेषु क्रमशः 403 लीटर्, 434 लीटर् अपि च 465 लीटर् डीजैल्-तैलम् अस्ति। तस्य पात्रस्य अधिकतमां धारणक्षमताम् अभिजानन्तु यत् तेषां त्रयाणामपि टैङ्कर्-यानानां डीजैल्-तैलं सम्पूर्णं मापयेत्।
8. तां लघुतमां सङ्ख्याम् अभिजानन्तु यां 6, 15 अपि च 18 एताभिः भागकरणेन प्रत्येकं सन्दर्भे 5 शेषः भवेत्।
9. अङ्क-चतुष्टयात्मिकीं तां सङ्ख्याम् अभिजानन्तु या 18, 24 अपि च 32 एताभिः सङ्ख्याभिः विभाज्या स्यात्।
10. अधोलिखित-सङ्ख्यानां ल.सा.अ. अभिजानन्तु यासु एका सङ्ख्या सदैव 3 इत्यस्याः गुणजत्वेन स्यात्।

    (a) 9 अपि च 4   (b) 12 अपि च 5

    (c) 6 अपि च 5   (d) 15 अपि च 4

    प्राप्त-ल.सा.अ. मध्ये एकस्य सामान्य-सर्व-निष्ठ-गुणधर्मस्य अवलोकनं कुर्वन्तु। किं ल.सा.अ. प्रत्येकं सन्दर्भे द्वयोः संख्ययोः गुणनफलम् अस्ति ? किं वयम् एतत् निष्कर्षं प्राप्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः संख्ययोः ल.सा.अ. सदैव 3 सङ्ख्यायाः एकः गुणजः अस्ति इति ?
11. अधोलिखितानां सङ्ख्यानां ल.सा.अ. अभिजानन्तु यासु एका सङ्ख्या अन्यस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डाः सन्ति।

    (a) 5, 20   (b) 6, 18

    (c) 12, 48   (d) 9, 45

    प्राप्तेषु परिणामेषु भवन्तः किं पश्यन्ति ?

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. गुणजरूपाणाम् अपि च गुणनखण्डानां परिज्ञानं कथं प्राप्तुं शक्यते ।
2. एतावत् पर्यन्तं वयं चर्चां कृतवन्तः अपि च अधोलिखितान् अन्विष्टवन्तः ।
   (a) एकस्याः सङ्ख्यायाः गुणनखण्डः तस्याः सङ्ख्यायाः पूर्ण-विभाजकः भवति ।
   (b) प्रत्येकं सङ्ख्या स्वयं कस्यचित् गुणनखण्डस्य रूपेण भवति ।
   (c) प्रदत्तायाः सङ्ख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डः तस्याः सङ्ख्यायाः अपेक्षया लघुतरः अथवा समानः भवति ।
   (d) प्रत्येकं सङ्ख्या स्वस्य प्रत्येकं गुणनखण्डस्य गुणजरूपेण भवति ।
   (e) प्रदत्तसङ्ख्यायाः प्रत्येकं गुणजः तस्याः सङ्ख्यायाः बृहत्तरः अथवा समानः भवति ।
   (f) प्रत्येकं सङ्ख्या स्वस्य गुणजरूपेण भवति ।
3. वयम् अवगतवन्तः –
   (a) सासङ्ख्यायस्याःद्वौएवगुणनखण्डौवर्तेते,सासङ्ख्याअपिच1,अभाज्य-सङ्ख्याइत्युच्येते। यासां सङ्ख्यानां कृते अधिकाः गुणनखण्डाः सन्ति ताः सङ्ख्याः भाज्यसङ्ख्याः इत्युच्यन्ते ।
   (b) सङ्ख्या 2 लघुतमा अभाज्य-सङ्ख्या अस्ति अपि च समसङ्ख्या अपि अस्ति । अन्याः सर्वाः अभाज्यसङ्ख्याः विषमाः भवन्ति ।
   (c) यदि द्वयोः संख्ययोः सामान्य-गुणनखण्डः केवलं 1 अस्ति, तर्हि साभाज्यसंख्ये इति उच्येते ।
   (d) यदि एका सङ्ख्या द्वितीयया विभाज्या अस्ति तर्हि सा द्वितीयसङ्ख्यायाः प्रत्येकं गुणनखण्डैः अपि विभाजनं प्राप्नोति ।
   (e) सा सङ्ख्या या द्वाभ्यां साभाज्यसङ्ख्याभ्यां विभाज्या भवति तर्हि तस्याः गुणनफलैः अपि विभाज्या भवति ।
4. सङ्ख्यानां भागम् अकृत्वा एव 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 अपि च 11 सङ्ख्याभिः विभाज्यता भवति उत न इत्यस्य अन्वेषणं कर्तुं शक्नुमः । वयं सङ्ख्यायाः अङ्कानां , विभिन्न-सङ्ख्याभिः मध्ये विद्यमानस्य सम्बन्धस्य अन्वेषणं कृतवन्तः ।
   (a) सङ्ख्यायाः अङ्कानां योगेन 2, 5 अपि च 10 इत्यनेन विभाज्यतां ज्ञातुं शक्यते ।
   (b) 3 अपि च 9 इत्यनेन विभाज्यतां केवलं सङ्ख्यानाम् एककस्थानं दृष्ट्वा एव वक्तुं शक्यते ।
   (c) 4 इत्यनेन विभाज्यताम् एकाङ्क-दशकस्थाने विद्यमानैः अङ्कैः तथा 8 इत्यनेन विभाज्यताम् एकाङ्क-दशक-शतकस्थाने विद्यमानैः अङ्कैः द्वारा वक्तुं शक्यते ।
   (d) 11 इत्यनेन विभाज्यतां दक्षिणतःआरभ्य सम-विषमस्थानयोः योगस्य मध्ये विद्यमानम् अन्तरं दृष्ट्वा वक्तुं शक्यते ।
5. यदि द्वे संख्ये एकया संख्यया विभजितं भवति तर्हि तयोः द्वयोः संख्ययोः योगः अथवा अन्तरम् अपि तया संख्यया विभाजनं प्राप्नुतः ।
6. (a) द्वयोः अथवा अधिकसंख्ययोः म.सा.अ. तासां सामान्य-गुणनखण्डेषु बृहत्तमः भवति ।
   (b) द्वयोः अथवा अधिकसंख्ययोः ल.सा.अ. तासां सामान्य-गुणनखण्डेषु लघुतमः भवति ।